Actividad grupal: Ecuaciones parabólicas.

1. Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden . Aplica este esquema para determinar la solución en el instante , tomando y .

**Respuesta:**

Al aplicar el método explícito, se debe considerar que las componentes referidas al tiempo deben ser discretizadas por diferencias progresivas, mientras que aquellas relacionadas con el espacio, deben trabajarse con diferencias centrales. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente desarrollo:

Multiplicando por k, a ambos lados de la igualdad, y reemplazando , se obtiene:

Agrupando términos semejantes:

(i)

Considerando algunos valores para i:

i = 1: (ii)

se presenta el problema que no conocemos a la condición de contorno , sin embargo, conocemos el valor de la derivada en dicho punto: . A partir de esta información, y aplicando diferencias finitas, podemos saber cuál es el valor esperando en x=0. Para obtener dicho parámetro, aplicaremos diferencias finitas centrales:

Esta nueva expresión, la podemos reemplazar en (ii), resultando:

(iii)

Esta expresión es relevante, debido a que nos aportará los datos de la primera fila, a partir de las condiciones de contorno. Nótese que 2t, corresponde a la función asociada a la derivada en dicho punto.

A partir de este análisis, podemos implementar el código en Matlab, para obtener los resultados solicitados.

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **U(x,0.5)** |
| 0 | 0.3381 |
| 0.1 | 0.4262 |
| 0.2 | 0.4896 |
| 0.3 | 0.5273 |
| 0.4 | 0.5391 |
| 0.5 | 0.5252 |
| 0.6 | 0.4863 |
| 0.7 | 0.4241 |
| 0.8 | 0.3408 |
| 0.9 | 0.2397 |
| 1.0 | 0.1250 |

Tabla 1.1: Resultado obtenido.

Figura 1.1: Código implementado en Matlab

function [U] = act\_explicita(cc1,cc2,f,L,nx,T,nt)

h=L/nx; x=0:h:L; % espacios espacial

k=T/nt; t=0:k:T; % espacios temporal

U=zeros(nx+1,nt+1);

c=feval(cc1,t); % Condición de contorno en x=a, para el vector tiempo, primera fila

U(nx+1,:)=feval(cc2,t); % Condición de contorno en x=b, para el vector tiempo, última fila

U(:,1)=feval(f,x); % Condición inicial, primera columna

lambda=k/h^2;

for j=1:nt

U(1,j+1)=(1-2\*lambda+k)\*U(1,j)+2\*lambda\*U(2,j)-(2+h)\*lambda\*h\*c(j);

for i=2:nx

U(i,j+1)=(1-2\*lambda+k)\*U(i,j)+lambda\*(U(i+1,j)+U(i-1,j))-h/2\*lambda\*(U(i+1,j)-U(i-1,j));

end

end

end

Gráfico, Gráfico de superficie

Descripción generada automáticamente

Figura 2.1: Gráfica de la solución de la EDP.

1. Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden . Aplica este esquema para determinar la solución en el instante , tomando y .

**Respuesta:**

Al aplicar el método implícito, se debe considerar que las componentes referidas al tiempo deben ser discretizadas por diferencias regresivas, mientras que aquellas relacionadas con el espacio, deben trabajarse con diferencias centrales. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente desarrollo:

Multiplicando por k, a ambos lados de la igualdad, y luego agrupando términos se tiene:

(i)

Sea , , , reemplazando en (i) se obtiene:

Considerando algunos valores para i:

i = 0:

i = nx-1:

A partir de este análisis, podemos implementar el código en Matlab, para obtener los resultados solicitados.

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **U(x,0.5)** |
| 0 | 0.3364 |
| 0.1 | 0.4246 |
| 0.2 | 0.4880 |
| 0.3 | 0.5258 |
| 0.4 | 0.5377 |
| 0.5 | 0.5239 |
| 0.6 | 0.4852 |
| 0.7 | 0.4232 |
| 0.8 | 0.3402 |
| 0.9 | 0.2393 |
| 1.0 | 0.1250 |

Tabla 1.2: Resultado obtenido.

Figura 1.2: Código implementado en Matlab

function [U]=act\_implicita(cc1,cc2,f,L,nx,T,nt)

h=L/nx;

x=0:h:L; % espacios espacial

k=T/nt; t=0:k:T; % espacios temporal

U=zeros(nx+1,nt+1);

U(:,1)=feval(f,x); % Condición inicial, primera columna

Ux(1,:)=feval(cc1,t); % Condición de contorno en x=a, para el vector tiempo, primera fila

U(nx+1,:)=feval(cc2,t); % Condición de contorno en x=b, para el vector tiempo, última fila

alfa1 = -k/h^2-k/2/h;

alfa2 = 1-k+2\*k/h^2;

alfa3 = -k/h^2+k/2/h;

% calcular columna a columna la solución lineal (sistema tridiagonal) nx-1

dp=alfa2\*ones(nx,1);

ds=alfa3\*ones(nx-1,1);

ds(1)=ds(1)+alfa1; % condición cont Xa

di=alfa1\*ones(nx-1,1); % Diagonal laterales inf

for j=2:nt+1

%términos independientes

d=U(1:nx,j-1);

d(1)=d(1)+2\*h\*alfa1\*Ux(1,j); %punto inicial se dato

d(end)=d(end)-alfa3\*U(nx+1,j);%punto final se dato

z=Crout(dp,ds,di,d);

U(1:nx,j)=z; % cada buble calculo la columna

end

end

Gráfico, Gráfico de superficie

Descripción generada automáticamente

Figura 2.2: Gráfica de la solución de la EDP.

1. Describe el esquema en diferencias finitas que resulta de aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales. Escribe la expresión matricial del sistema resultante, identificando cada una de las matrices del sistema y resuelve la EDP. Representa gráficamente e indica en una tabla la solución obtenida en el instante .

**Extensión máxima:** 10 páginas, fuente: Calibri12, interlineado 1.5.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ecuaciones parabólicas (Valor real: 5 puntos) | Descripción | Puntuación máxima  (puntos) | Peso  % |
| Criterio 1 | Calidad en la presentación: expresiones matemáticas escritas con editor de ecuaciones, tablas en formato tabla, legibilidad de gráficos… La no presentación en Word supone un 0 en este apartado. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 2 | Apartado 1. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 3 | Apartado 1. Tabla de resultados correcta. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 4 | Apartado 2. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 5 | Apartado 2. Tabla de resultados correcta. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 6 | Apartado 3. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 7 | Apartado 3. Expresión matricial correcta. | 1 | 10 % |
| Criterio 8 | Apartado 3. Tabla de resultados correcta | 1 | 10 % |
| Criterio 9 | Apartado 3. Gráfica correcta. | 0.5 | 5 % |
|  |  | **10** | **100 %** |